Тасжанов Тимур, 511 группа.

**Уравнения Лагранжа-Эйлера. Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства.**

**1.Принцип наименьшего действия. Уравнения Эйлера- Лагранжа.**

Рассмотрим  материальных точек. Радиус-вектор  определяет положение материальной точки. Этот вектор в пространстве определяется тремя декартовыми координатами: . Таким образом, чтобы определить положение в пространстве системы, состоящей из материальных точек, нужно задать  радиус-векторов, то есть  координат. Числом степеней свободы материальной точки называется число независимых координат, которые необходимо задать, чтобы однозначно определить положение данной точки относительно рассматриваемой системы отсчета. Следовательно, число степеней свободы системы из  материальных точек равно .

Введем обобщенные координаты , … ,, так как координаты материальных точек могут быть совершенно любыми.

Рассмотрим уравнения движения для системы с степенями свободы:

 

Для того, чтобы определить состояние системы в момент времени нужно, кроме задания обобщенных координат ,…,, задать еще и обобщенные скорости в момент времени . То есть, имея уравнение , значения обобщенных координат и скоростей, можно определить в момент времени  значения обобщенных ускорений . Получим следующие уравнения:

 

Согласно принципу наименьшего действия, любая механическая система характеризуется функцией всех обобщенных координат , обобщенных скоростей  и времени :



которая называется функцией Лагранжа.

Принцип наименьшего действия утверждает, что если в моменты времени  и система занимает определенные положения, характеризуемые набором координат и , соответственно, то между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

, 

принимал минимальное значение.

 При заданной функции Лагранжа  величина интеграла  зависит от вида функции , т.е. от выбора пути интегрирования между точками  и . Поэтому интеграл  – это функционал (функция от функции, т.е. правило, сопоставляющее множеству функций {q(t)} числовое множество {S} ), называемый действием.

 Выпишем необходимые условия экстремальности интеграла (3):

, (4)

где - первая вариация интеграла .

 Теперь выпишем составляющую по -ой функции:

 (5)

 Заметим, что , и проинтегрируем второе слагаемое по частям:

 (6)

Первое слагаемое обращается в нуль, так как (все траектории должны начинаться в положении  и заканчиваться в положении ). Следовательно, подынтегральное выражение второго слагаемого должно обращаться в нуль для .Тогда:

  (7)

Эта система уравнений в механике называется уравнениями Лагранжа.

Рассмотрим некоторые свойства функции Лагранжа. Пусть есть две независимые механические системы, тогда, если рассматривать эти две системы как одну, то функция Лагранжа для новой системы будет иметь вид:

,

где -функция Лагранжа первой системы, а -функция Лагранжа второй системы.

Далее, пусть даны функции Лагранжа  и  и пусть они отличаются на полную производную по  от некоторой функции :



Тогда:



Таким образом, функция Лагранжа определена с точностью до полной производной от некоторой функции от  и .

**2.Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства.**

Однородность пространства означает, что свойства механической системы не меняются при ее параллельном переносе:

 (1)

где - некоторый постоянный вектор сдвига.

 В частности, это означает, что при подстановке (1) вид функции Лагранжа не изменится:

 (2)

Так как  не зависит от  , то:

 (3)

Суммируя левую и правую части уравнений Лагранжа

 

и учитывая (3), получим:



Следовательно:



 Таким образом, в замкнутой механической системе векторная величина , называемая импульсом системы, остается постоянной при движении.